

Matematica finanziaria: soluzioni della prova di esonero del 17 maggio 2006

1. Viene chiesto alla compagnia di assicurazioni *morstuavitamea* un preventivo per una rendita vitalizia di 300€ mensili posticipati. Calcolare il prezzo minimo che *morstuavitamea* deve chiedere, supponendo che:

- (a) la persona da assicurare vivrà ancora almeno 30 anni;
- (b) si ritiene corretto un tasso di valutazione del 10% annuo per i prossimi 5 anni, e del 12% annuo nei successivi 25 anni.

Soluzione. Il prezzo minimo è il valore attuale della rendita minima che la compagnia ritiene dovrà pagare all'assicurato. La rendita minima è data dall'ipotesi (a) (rendita di 30 anni) e il tasso di valutazione dall'ipotesi (b). Viene 32738€ ■

2. Vengono emesse delle obbligazioni dal valore facciale di 1000€ ciascuna, di durata 3 anni e tasso annuale di remunerazione del 9%. Il rimborso è progressivo. Calcolare il prezzo di un'obbligazione rimborsata al secondo anno che ha fornito $YTM = 0.1$.

Soluzione. Se l'obbligazione è rimborsata al secondo anno, il suo flusso di cassa è (90, 1090), e quindi il prezzo è dato da $90\nu + 1090\nu^2$ con $\nu = 1/1.1$. Viene 982.645. ■

3. Un'industria concepisce un nuovo prodotto, i cui costi di produzione sono descritti nel seguente modo:

- (a) 2 milioni di euro al tempo $t = 0$, 1 milione di euro al tempo $t = 3$;
- (b) 2000 ore di lavoro all'anno, al costo di 20€ per ora, e 100 tonnellate di materiale grezzo all'anno, al costo di 70€ per tonnellata;

Indagini di mercato stimano che:

- (a) il prodotto resterà in commercio per 4 anni esatti;
- (b) ogni anno si venderanno 1 milione di unità di prodotto, al prezzo di 3€ per unità;

Discutere la convenienza di questo progetto con il criterio del TIR.

Soluzione. Il TIR viene 1.38 (si usa il metodo della bisezione). È un TIR particolarmente conveniente, ma la discussione è sempre la stessa: se c'è un tasso di investimento superiore al 138% non sceglieremo il progetto, se c'è un tasso di investimento inferiore al 138% sceglieremo il progetto, se il tasso di investimento sul mercato è proprio del 138% possiamo sia scegliere che non scegliere di attuare il progetto. ■

4. Si ottiene un prestito di 1000€ di durata 5 anni e remunerato al 10% annuo, con interessi pagati annualmente e posticipatamente. Il capitale viene rimborsato interamente alla scadenza. Determinare valore, nuda proprietà e usufrutto dopo 4 anni, usando un tasso di valutazione del 9% e supponendo di aver già pagato la quarta rata.

Soluzione. Valore= 1009.17, nuda proprietà= 917.431, usufrutto= 91.7431. ■

5. I titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1 sono venduti rispettivamente ai prezzi 980, 920, 880, 900. Ordinarli dal più sensibile al meno sensibile per variazioni dei tassi di valutazione.

Tabella 1: Titoli A, B, C, D .

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	100	80	0	0+1000
anno 2	100	80	0	0
anno 3	100+1000	80+1000	0+1000	0

Soluzione. È il solito esercizio sulla DMF. L'unica cosa da osservare è che non viene data l' YTM per i singoli titoli, bensì i loro prezzi. Con i prezzi si calcolano le *yield to maturity* dei titoli (che vengono diverse!), e con queste si calcola la durata media finanziaria. Viene $C > B > A > D$. ■

6. Nelle ipotesi di una struttura per scadenze data dalla tabella 2, si supponga l'esistenza di un tasso forward $i(1, 4) = 0.05$. Descrivere un arbitraggio (solo CLEA, no CLEAI).

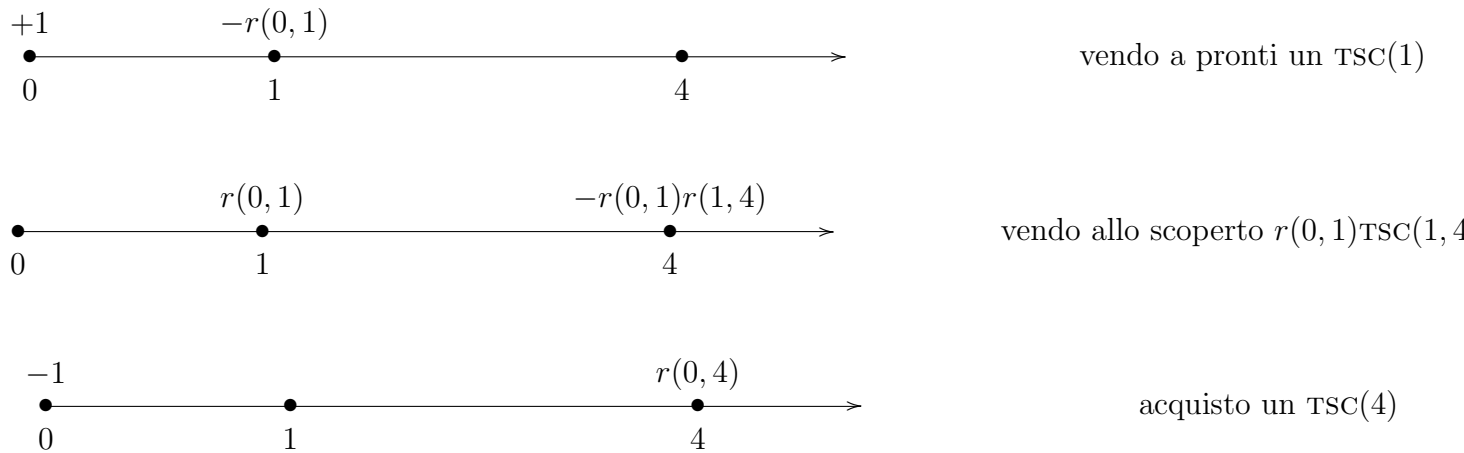
Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

Svolgimento. Calcoliamo il tasso forward atteso per l'intervallo $(1, 4)$. Se il mercato fosse coerente, dovremmo avere $r(0, 1)r(1, 4) = r(0, 4)$, da cui

$$r(0, 1)r(1, 4) = r(0, 4) \Leftrightarrow r(1, 4) = \frac{r(0, 4)}{r(0, 1)} \Leftrightarrow i(1, 4) = \sqrt[3]{\frac{r(0, 4)}{r(0, 1)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1.08^4}{1.05}} - 1 = 0.0901893 \neq 0.05.$$

Dunque la presenza di un tasso reale $i(1, 4) = 0.05$ permette di costruire il seguente arbitraggio (poiché $0.05 < 0.0901893$, siamo nel caso $r(0, 1)r(1, 4) < r(0, 4)$):



Alla fine dell'arbitraggio disporrò di

$$r(0, 4) - r(0, 1)r(1, 4) = 1.08^4 - 1.05 \cdot 1.05^3 = 0.144983 > 0.$$

■